Analisi in frequenza

Misura dei fenomeni acustici in decibel

I fenomeni acustici consistono in fenomeni oscillatori della materia; quindi, contrariamente alle onde elettromagnetiche non si propagano nel vuoto e necessitano per la loro propagazione di un mezzo elastico.
L'orecchio umano percepisce questi fenomeni per un intervallo di frequenze che va dai 20 Hz e i 20 kHz. Le oscillazioni non percepibili che si trovano al di sopra dei 20 kHz vengono chiamate ultrasuoni, mentre al di sotto dei 20 Hz infrasuoni.
Il suono si propaga nel mezzo elastico tramite onde di pressione. La sorgente sonora, cioè un corpo in vibrazione, trasmette sollecitazioni di pressione al mezzo, mediante una legge matematica in funzione del tempo. Le particelle del mezzo, sollecitate, oscillano attorno alla loro posizione di riposo, dando origine a trasformazioni della loro energia potenziale elastica in energia cinetica e viceversa. Nel mezzo di propagazione si ha quindi una perturbazione di pressione, la cui velocità è chiamata velocità del suono.
I fenomeni acustici vengono espressi mediante la scala logaritmica dei decibel (dB), che fa riferimento alla pressione acustica; quest'ultima è la differenza tra la pressione p(t) presente nell'istante t e la pressione statica che ci sarebbe nello stesso punto e nello stesso istante t in assenza del passaggio dell'onda sonora. Il livello di pressione acustica L in dB al di sopra di un livello zero di riferimento, che corrisponde alla pressione di riferimento P_0, è dato dalla relazione:

$$L = 20 \log_{10}(P / P_0)$$

dove P è la pressione acustica.
La scala dei decibel tiene quindi conto della percezione logaritmica che l'orecchio umano ha del suono e che è caratteristica di tutte le sensazioni umane, le quali sono proporzionali al logaritmo dello stimolo.

La sensazione uditiva

I fenomeni acustici sono caratterizzati da due grandezze: pressione acustica e frequenza. La prima dipende dalla pressione esercitata dall'onda sonora sulle particelle del mezzo di propagazione, la seconda dal numero d'oscillazioni che avvengono al passaggio dell'onda in un secondo.

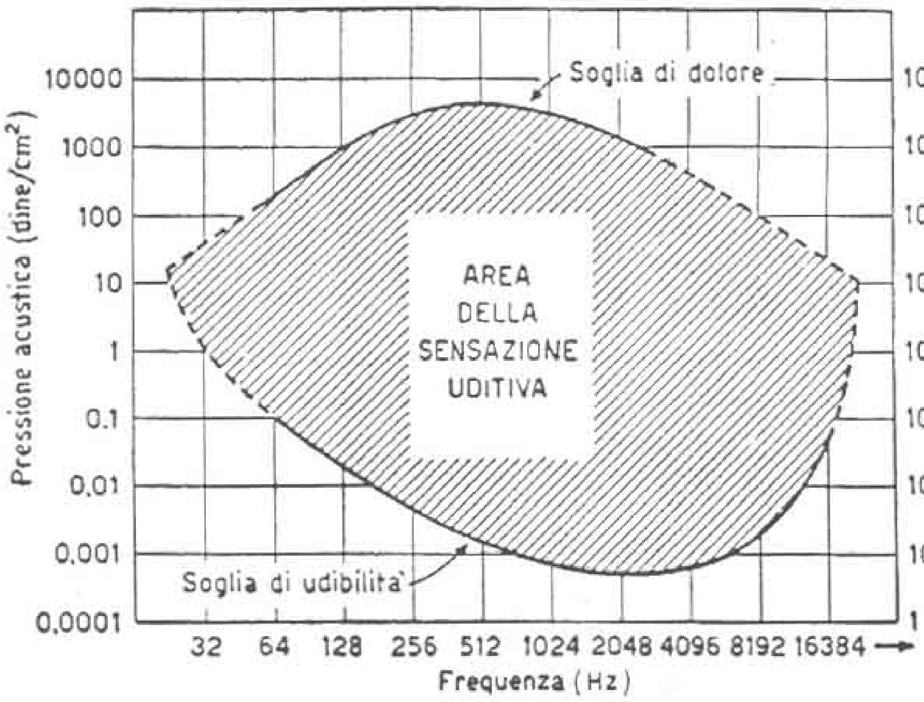


fig. 1

Il grafico (fig. 1) mette in relazione queste due grandezze e delimita l'area della sensazione uditiva che racchiude tutti i suoni percepibili dall'udito umano; superiormente essa è limitata da una curva detta soglia del dolore e inferiormente dalla curva chiamata soglia d'udibilità.

Analisi Armonica del Suono

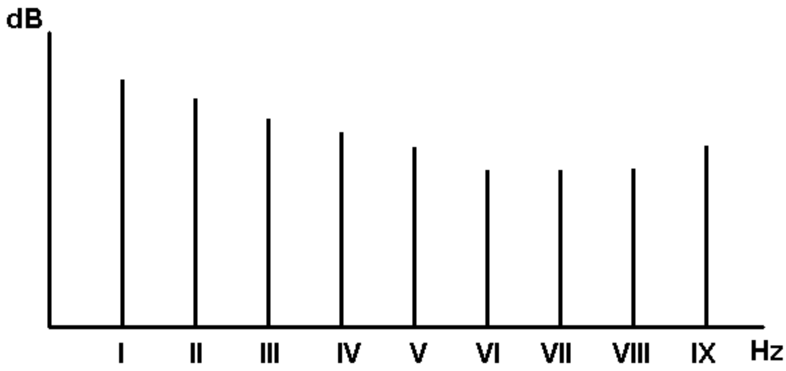
La maggior parte, anzi la quasi totalità dei suoni che udiamo nel mondo reale, non sono suoni *semplici*, o *puri*, ma suoni *complessi*, cioè suoni composti da una maggiore o minore quantità di suoni puri; questi vengono detti *componenti* del suono complesso.Per meglio comprendere questo fenomeno, stabiliamo un'analogia con l'ottica.È noto come alcuni colori, detti *fondamentali*, siano *puri*, cioè non ulteriormente scomponibili. Questi colori sono il rosso, il giallo e il blu. A ciascuno di essi corrisponde una certa *lunghezza d'onda* del raggio luminoso, e il prisma (che scompone la luce bianca nei sette colori dello spettro luminoso) mostrerà solamente quella componente. La medesima cosa avviene per il suono. A una certa lunghezza d'onda del suono corrisponde una certa altezza percepita. Se non è presente contemporaneamente nessun'altra frequenza, il suono sarà *puro*.Un suono puro, o sinusoide, ha forma d'onda *sinusoidale*, ed è la rappresentazione della funzione trigonometrica

$$\sin(x)$$

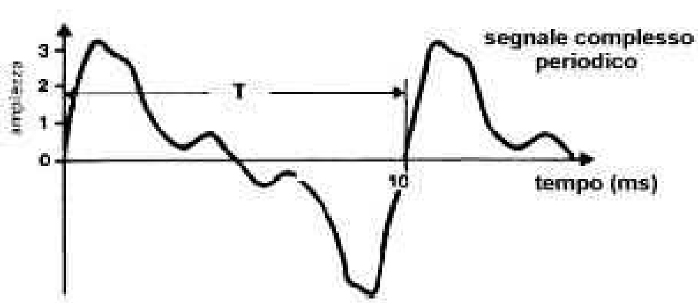
ed è costituito da *una sola frequenza*, senza armoniche. Viene detto perciò anche *suono puro*. Se le componenti sono in rapporto di frequenza intero con la componente di frequenza più bassa, si dicono *armoniche*. La componente a frequenza più bassa si chiama *fondamentale* o *prima armonica*; la componente di frequenza doppia della fondamentale si chiama *seconda armonica*;la componente di frequenza tripla della fondamentale si chiama *terza armonica*, etc. Per la definizione dello spettro di un suono armonico, se supponiamo che siano sempre presenti **tutte** le armoniche (fino al limite superiore di udibilità, dal momento che componenti ultrasoniche non influenzano la percezione timbrica), sarà sufficiente definire le ampiezze di tutte queste armoniche, per esempio con tabelle di questo genere:

ARMONICA	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII etc.**
AMPIEZZA	**1**	**0.5**	**0.33**	**0.25**	**0.2**	**0.13**	**0.2 etc.**

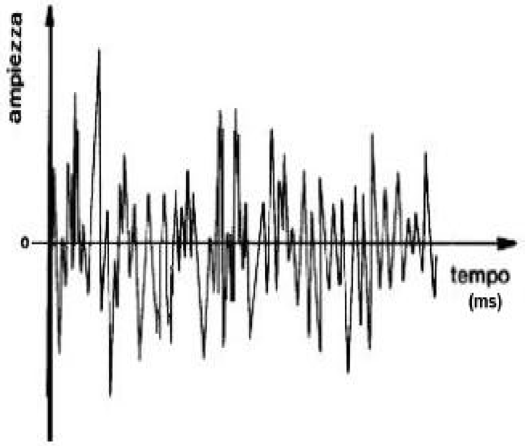
che può anche essere rappresentata in grafico:

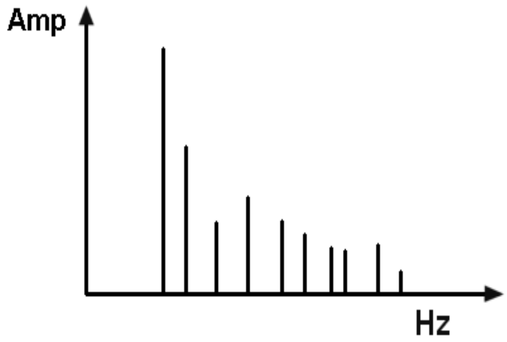


Questo è lo *spettro* di un suono: sull'asse orizzontale vi sono le frequenze, in kHz, sull'asse verticale le ampiezze in dB. Si può notare come questo spettro sia di tipo armonico, in quanto le frequenze sono equispaziate: ciò significa che sono tutte in rapporto armonico con la fondamentale, infatti sono presenti le frequenze: .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, 1 kHz, che equivalgono a: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 Hz. Sono quindi presenti tutte le armoniche fino alla X. In figura è mostrato uno spettro di tipo armonico (figura sopra). Si può notare come questo tipo di spettro dia luogo a un'onda *periodica* (figura sotto); è infatti ben visibile la ripetizione della forma d'onda nella parte destra della figura in basso.



Le componenti possono però essere in rapporti *non armonici*, come si può vedere in figura:





Le frequenze non sono più equispaziate, e i rapporti di frequenza con la più bassa non sono interi, anzi sono addirittura irrazionali. L'onda risultante non è quindi periodica, e infatti nella rappresentazione dell'onda non si notano ripetizioni, non è possibile individuare i cicli. I suoni periodici (o meglio, *quasi periodici*, dal momento che in fisica si definisce periodico un fenomeno che prosegue all'infinito) vengono percepiti come dotati di altezza definita, per esempio i suoni degli strumenti musicali ad altezza determinata o i suoni vocalici nella voce umana. I suoni non periodici invece non vengono percepiti come dotati di altezza definita; al massimo è possibile individuare una *gamma* o *banda* di frequenza in cui c'è un addensamento di componenti dotate di ampiezza rilevante; per esempio i suoni degli strumenti musicali ad altezza non definita (piatti, gong, triangolo) o i suoni consonantici della voce umana. Abbiamo fino a qui costruito suoni complessi con la somma di suoni semplici, si è cioè svolto un processo di *sintesi*. Ma è anche possibile effettuare il cammino opposto, di *analisi*, cioè scomporre un suono complesso nelle sue componenti.

Il teorema di Fourier stabilisce che *qualunque suono periodico (anche complesso) è sempre rappresentabile mediante un opportuno numero d'onde (sinusoidi) di determinate ampiezze, frequenze e fasi:*

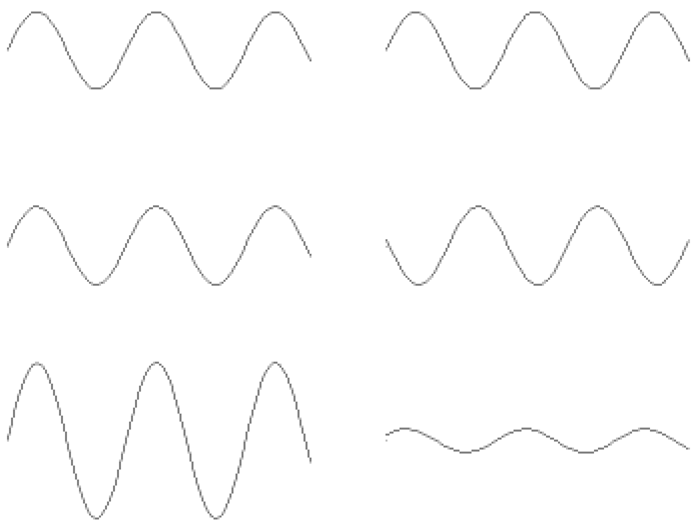
$$x(\tau) = \sum_{i=1}^{N(\to\infty)} A_i \operatorname{sen}(\omega_i \tau + \varphi_i) \qquad (1)$$

Nella pratica però non è possibile usare infinite sinusoidi, anzi, le frequenze che compaiono all'interno della (1) in

$$\omega_i = 2\pi f_i$$

devono seguire una legge matematica ben precisa; in genere sono equispaziate. Da quanto si è detto è evidente la differenza del parametro timbro rispetto agli altri due precedentemente esaminati (frequenza e ampiezza): mentre infatti queste ultime sono grandezze unidimensionali (un solo numero è cioè sufficiente alla loro completa definizione, ed esse possono essere rappresentate da punti su una retta, così che è sempre possibile affermare per esempio che una certa frequenza è maggiore di un'altra), il timbro (o meglio, lo spettro) è una grandezza pluridimensionale (per la sua definizione è necessaria una serie di numeri, le ampiezze di ciascuna componente).

Ne deriva che non è possibile organizzare gli spettri in scale, come per la frequenza e l'ampiezza, poiché un determinato spettro non è rappresentabile come punto di una retta, bensì come punto di una spazio a n dimensioni, o n- dimensionale, dove n è il numero di componenti di ampiezza diversa da zero. Ricordiamo quanto detto nel cap. 6 a proposito della somma di onde: istante per istante i valori istantanei dell'ampiezza delle diverse onde si sommano *algebricamente*, cioè con il loro segno, positivo o negativo. Quando due onde della stessa frequenza si sommano, si ha il fenomeno dell' *interferenza*. Quindi se due onde hanno la stessa frequenza, l'ampiezza risultante dalla loro somma sarà la somma delle singole ampiezze. Questo è però vero se le due onde sono *in fase*, cioè se i loro picchi positivi coincidono. Se le due onde non sono in fase, picchi positivi e picchi negativi non coincidono più, e quindi l'ampiezza massima andrà calcolata sommando punto per punto le ampiezze istantanee delle due onde. Se poi le due onde sono sfasate di un semiperiodo (o sono, come si dice, *in controfase*), allora l'ampiezza dell'onda risultante risulterà dalla *differenza* delle ampiezze massime delle due onde. Al limite, se le due onde sono in controfase e le loro ampiezze sono uguali, la loro somma sarà nulla, in quanto le due onde si annulleranno reciprocamente.



Filtri passa-banda

Un primo metodo usato per l'analisi in frequenza dei segnali stazionari si serve di un "banco" di *filtri passa – banda* (come i *filtri d'ottava*), cioè di una serie di dispositivi ciascuno dei quali lascia passare solo un determinato campo di frequenze, reiettando le componenti del suono a frequenze maggiori e minori. Collegando uno strumento di misura all'uscita di ogni filtro è possibile misurare il livello di segnale che compete al particolare intervallo di frequenze (fig. 2).

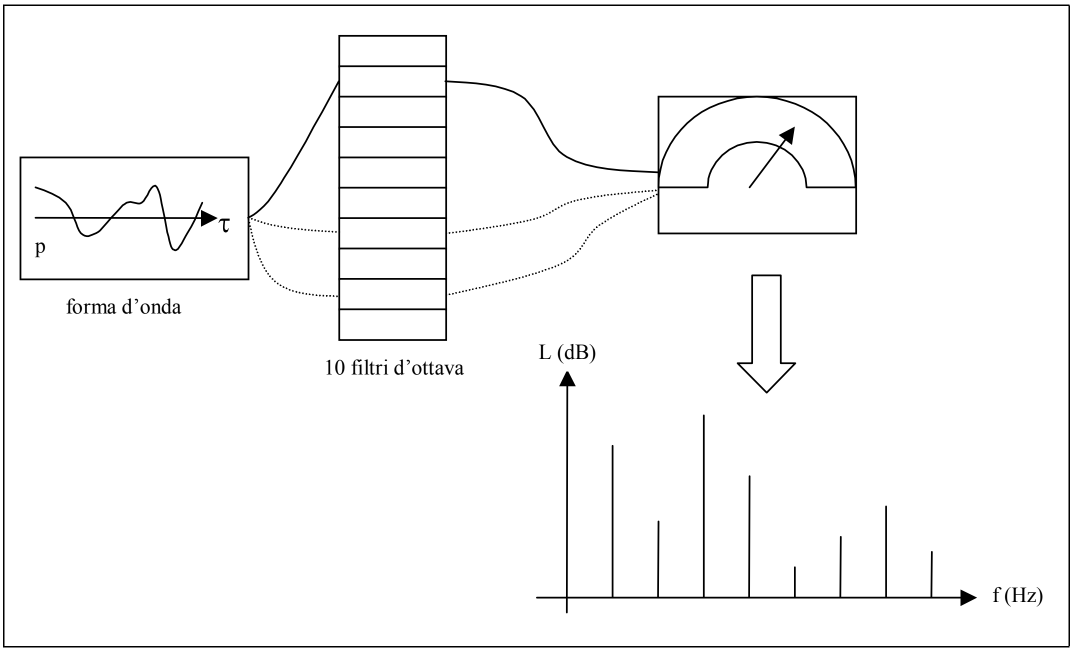


Figura 1

In un grafico in funzione della frequenza un filtro passa - banda si può rappresentare con una zona in cui il *guadagno* è pressoché costante e pari a 0 db (*banda efficace*, Δf) e con due zone, ai lati della prima, in cui il guadagno decresce fino a valori trascurabili (fig. 3). La banda efficace è compresa tra f_l e f_2, che sono le *frequenze di taglio*, poste a metà energia rispetto alla banda passante; per definizione $G(f_l) = G(f_2) = -3$ db. f_c è la *frequenza di centro banda*, tale che $G(f_c) = 0$ db.

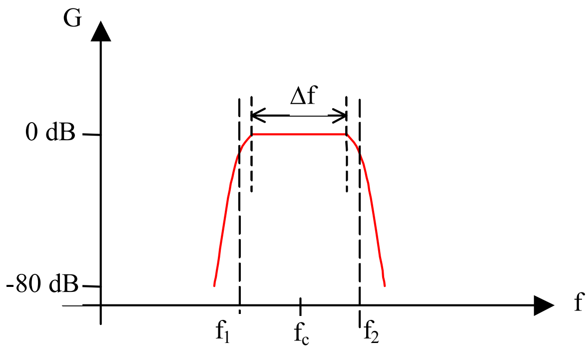


Figura 2

Bisogna notare che un filtro ideale dovrebbe avere la curva del guadagno fatta come un impulso rettangolare (in frequenza), ma finché il dispositivo è realizzato con componenti passivi i fronti di salita e di discesa non potranno mai essere verticali.

Ad es., se un filtro ha $f_l = 707$ Hz e $f_2 = 1414$ Hz qualsiasi suono al di fuori di questo intervallo di frequenze non dovrebbe passare, ma in realtà queste componenti, anche se attenuate, si ritrovano ugualmente in uscita. La pendenza dei fronti di salita e discesa della caratteristica deve comunque essere contenuta all'interno di una tolleranza definita dall'IEC, un'organizzazione che si occupa della definizione degli standard per le misure acustiche.

Gli strumenti utilizzati per la lettura dei livelli sono in genere *fonometri* palmari con frequenze selezionabili successivamente: ad ogni scelta della frequenza si legge il valore indicato dallo strumento e lo si memorizza; al termine del procedimento si è in grado di definire lo spettro del segnale. Il suono deve ovviamente essere stazionario, altrimenti i livelli varierebbero nel tempo e la misura fatta in questo modo non avrebbe senso.

Per rendere il rilevamento sempre istantaneo è necessario un banco di *voltmetri*, che indica in tempo reale il segnale di uscita in forma analogica. Un dispositivo del genere è detto R.T.A. (Real Time Analyzer, *analizzatore in tempo reale*).

Un'ottava è definita come un intervallo di frequenze in cui il limite inferiore (f_1) e quello superiore (f_2) verificano le relazioni:

$$f_2 = 2f_1, f_1 = \frac{f_c}{\sqrt{2}}, f_2 = f_c \cdot \sqrt{2} \qquad (0)$$

Per coprire l'intero campo delle frequenze udibili ci vogliono 10 filtri d'ottava, ciascuno dei quali ha una frequenza di centro banda doppia di quella del filtro precedente (il tutto è disciplinato da norme I.S.O.):

f_{c1}	f_{c2}	f_{c3}	f_{c4}	f_{c5}	f_{c6}	f_{c7}	f_{c8}	f_{c9}	f_{c10}
31,5 Hz	63 Hz	125 Hz	250 Hz	500 Hz	1 kHz	2 kHz	4 kHz	8 kHz	16 kHz

Tabella 1

In molte applicazioni la suddivisione dell'asse delle frequenze in bande d'ottava risulta piuttosto grossolana, e vi è la necessità di usare filtri a banda più stretta (a *frazione d'ottava*), che mantengono però sempre la proporzione tra la larghezza di banda e la frequenza di centro banda:

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{f_2 - f_1}{f_c} = const \qquad (1)$$

Per i filtri d'ottava la costante è pari a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707 \qquad (2)$$

In questo modo f_2 di un filtro è sempre uguale a f_1 del successivo. Questi tipi di filtri sono detti ad *apertura percentuale* costante. Uno dei motivi che sta alla base dell'adozione di questo metodo è che il sistema uditivo umano risponde agli stimoli più secondo lo schema dell'apertura percentuale costante che secondo quello dell'apertura costante.

Ad es., per verificare la (1) deve essere:

- a f_c=1000 Hz: Δf=707 Hz;
- a f_c=500 Hz: Δf=353 Hz.

Esistono quindi diversi tipi di filtri, a seconda del numero di parti in cui viene divisa ogni banda:

- filtri d'ottava;
- " di 1/3 d'ottava;
- " di 1/6 " ;
- " di 1/12 " ;
- " di 1/24 " .

La scala dei terzi d'ottava è la più usata. E' formata da 30 bande da 1/3 d'ottava ciascuna.

Esempio

Consideriamo il caso di un filtro in terzi d'ottava, e vediamo come risulta la suddivisione della banda d'ottava che ha f_c=1000 Hz. Devo in pratica trovare f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}, f_1, f_2, f_3 e f_4, cioè le tre frequenze di centro banda e gli estremi di ogni banda (fig. 4).

Troviamo intanto la frequenza di taglio inferiore della banda d'ottava:

$$f_1 = \frac{f_c}{\sqrt{2}} = 707Hz \tag{3}$$

Si ha anche che

$$f_{c2} = f_c = 1000Hz \tag{4}$$

Le condizioni da verificare sono:

$$\begin{cases} \Delta f_1 + \Delta f_2 + \Delta f_3 = 707Hz \\ \dfrac{\Delta f}{f_c} = const \end{cases} \tag{5}$$

Ora definisco il rapporto tra due frequenze di centro banda consecutive:

$$K = \frac{f_{c(i+1)}}{f_{ci}}, \text{ con i=1,2,3.} \tag{6}$$

Elevando K al cubo (perché voglio bande da 1/3 d'ottava) ottengo tutta l'ottava, quindi un raddoppio della frequenza:

$$K^3 = 2 \tag{7}$$

Ricavo K:

$$K = \sqrt[3]{2} \cong 1{,}26 \tag{8}$$

Considerando che la (6) vale anche per le freq. di taglio posso allora trovare:

$$f_2 = f_1 \cdot K = 891Hz$$
$$f_3 = f_2 \cdot K = 1122Hz \qquad (9)$$
$$f_4 = f_3 \cdot K = 1414Hz$$

e anche:

$$f_{c1} = \frac{f_{c2}}{K} \cong 800Hz \qquad (10)$$
$$f_{c3} = f_{c2} \cdot K \cong 1250Hz$$

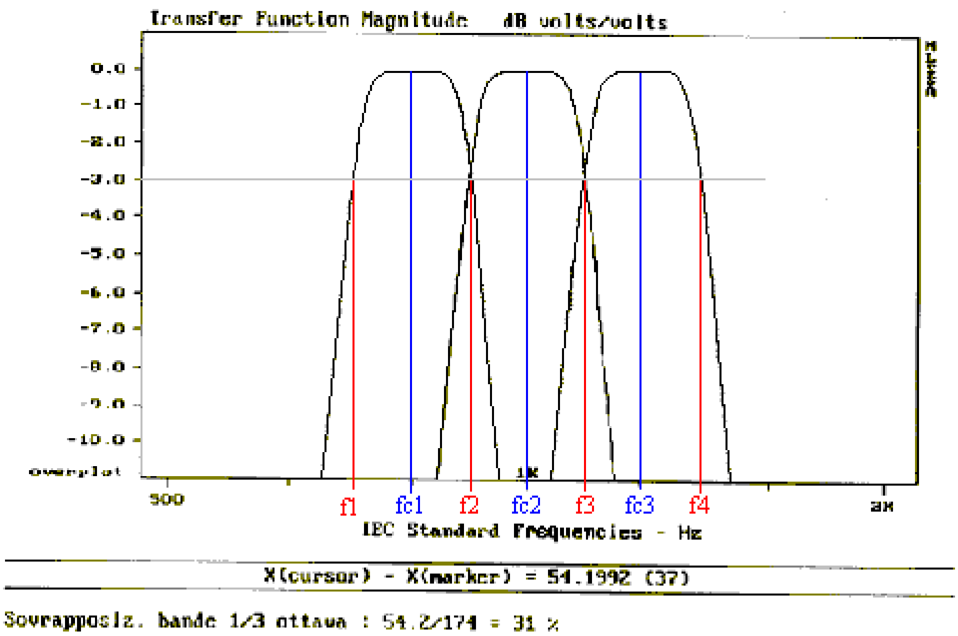


Figura 3

Dal grafico si vede che se la frequenza di un suono puro cade nella zona in cui due bande da 1/3 d'ottava si sovrappongono allora lo spettro ha energia in due diversi intervalli di frequenze. Questo fenomeno non è raro, perché la sovrapposizione è circa del 30%.

Osservazione

E' importante osservare che uno spettro, a seconda della tecnica utilizzata per ricavarlo e del tipo di visualizzazione impiegato, può cambiare anche notevolmente d'aspetto. Se prendiamo ad esempio uno spettro in bande di 1/3 d'ottava con asse delle frequenze in scala lineare (fig. 5) e lo confrontiamo con uno in scala logaritmica (fig. 6), vediamo che il primo comprime in un breve intervallo di frequenze una notevole quantità di informazioni.

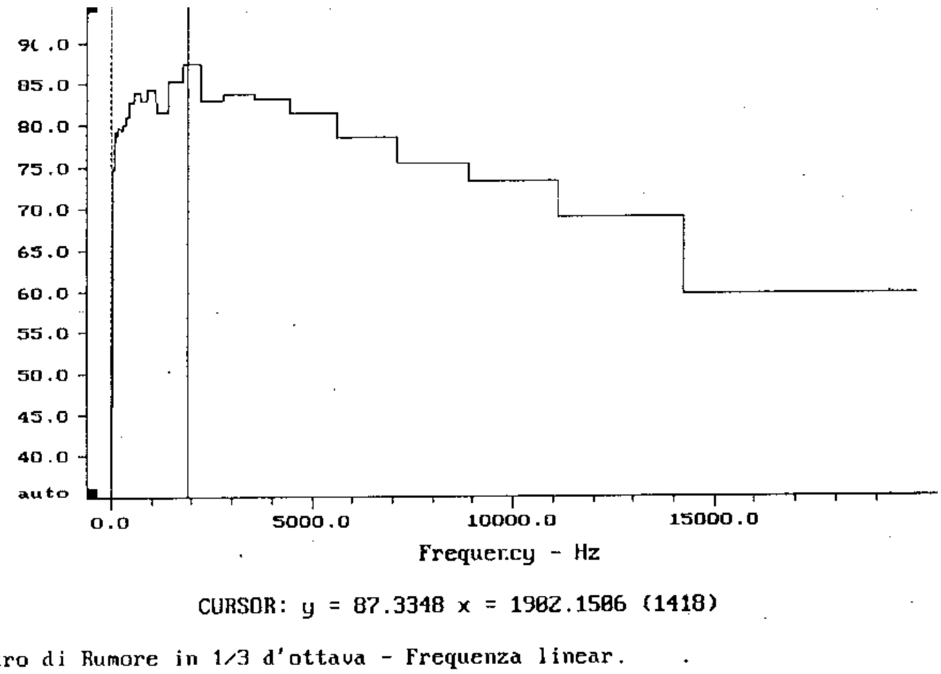


Figura 4

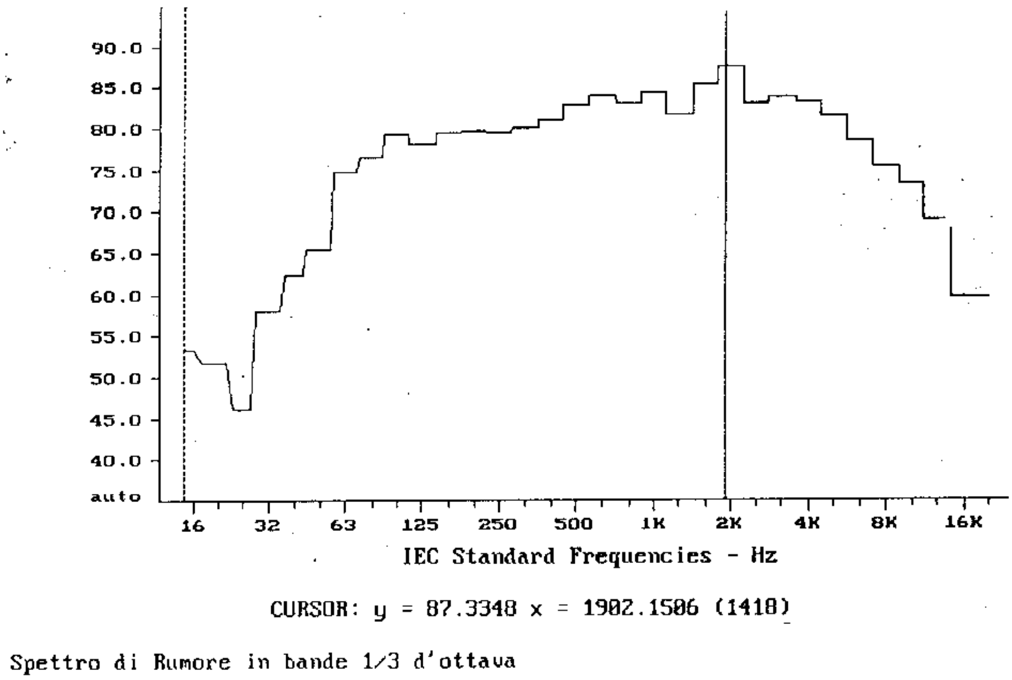


Figura 5

Le prossime due figure, che si riferiscono allo stesso suono dei due grafici precedenti, oltre a fornire un'ulteriore prova di quanto detto sopra, evidenziano anche un altro fenomeno. In fig. 7 è riportato lo spettro in banda stretta in scala logaritmica, in fig. 8 in scala lineare (sempre dell'asse delle ascisse).

Notando che la posizione del cursore è sempre la stessa (1902,15 Hz circa), leggendo il valore corrispondente (~66,9 db) e confrontandolo con quello in fig. 5 e fig. 6 (~87,3 db) ci si rende conto che il livello negli spettri in bande di 1/3 d'ottava è molto superiore a quello negli spettri in banda stretta.

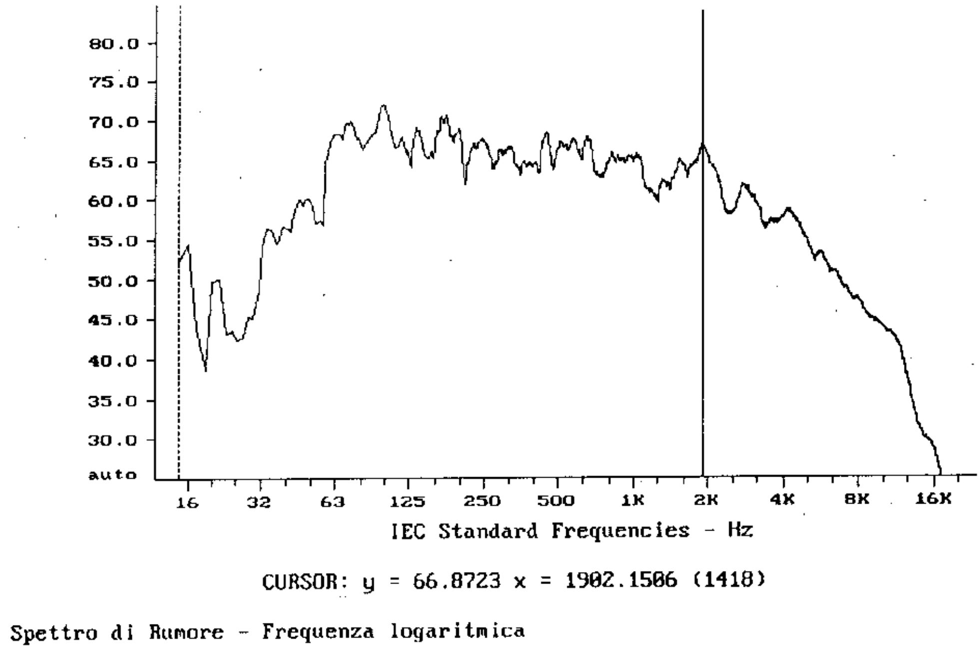


Figura 6

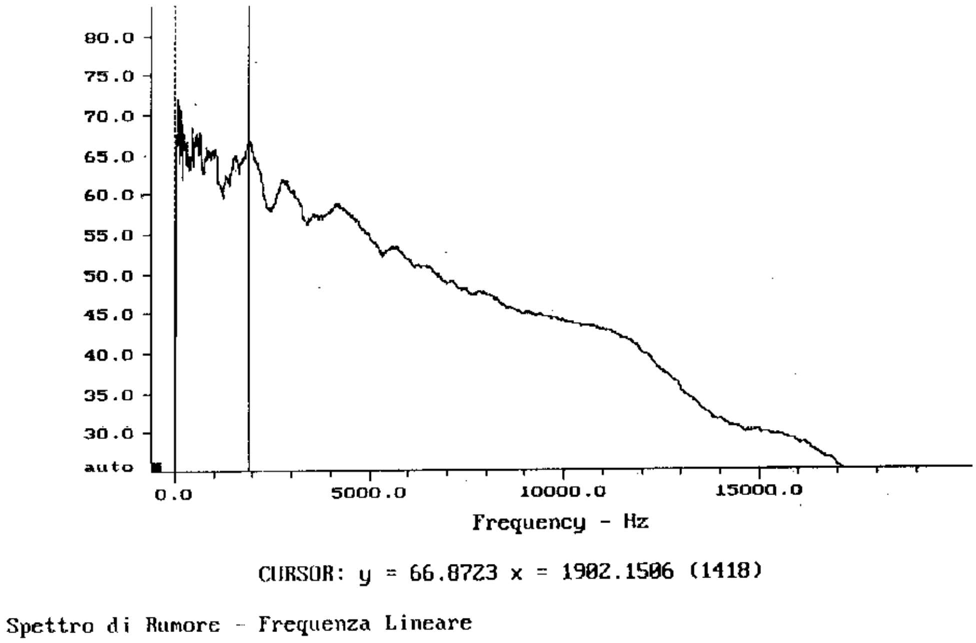


Figura 7

Questo comportamento si può spiegare col fatto che le bande da 1/3 d'ottava sono molto più larghe, ovviamente, di quelle "strette", e quindi possono catturare al loro interno delle zone di frequenze con energia mediamente elevata anche se il picco massimo non è compreso.

Nonostante la precisione degli ultimi due spettri, in ogni caso, il nostro udito rimane meglio rappresentato dal grafico di fig. 6.

Analisi in banda stretta

Un altro metodo per definire lo spettro di un segnale è l'analisi *in banda stretta* (o *di Fourier*). Matematicamente è richiesto l'utilizzo della D.F.T. (Discrete Fourier Transformat), che si calcola ormai unicamente per via digitale con l'ausilio del computer.

In questo caso sono però necessarie due ipotesi, non una sola:

1. Segnale stazionario;
2. Segnale periodico (ipotesi aggiuntiva).

Da ciò segue che non è possibile usare l'analisi di Fourier per la voce umana; si può invece per le macchine rotanti, ad es., perché il suono che emettono, anche se complesso, è periodico.

La base matematica che giustifica l'analisi di Fourier è il

Teorema di Fourier

Il teorema di Fourier stabilisce che *qualunque suono periodico (anche complesso) è sempre rappresentabile mediante un opportuno numero d'onde (sinusoidi) di determinate ampiezze, frequenze e fasi:*

$$x(\tau) = \sum_{i=1}^{N(\to\infty)} A_i \operatorname{sen}(\omega_i \tau + \varphi_i) \tag{11}$$

Nella pratica però non è possibile usare infinite sinusoidi, anzi, le frequenze che compaiono all'interno della (11) in

$$\omega_i = 2\pi f_i \tag{12}$$

devono seguire una legge matematica ben precisa; in genere sono equispaziate (fig. 9).

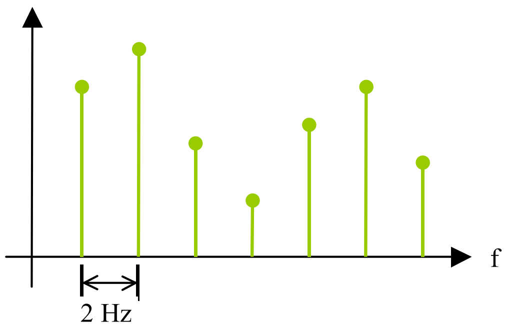


Figura 8

Questa non è più un'analisi di Fourier fatta secondo il teorema, ma è un'analisi *discreta* in relazione ad una legge matematica inderogabile.

Esercizio

Data la seguente tabella calcolare il livello sonoro totale ponderato A, e il livello sonoro totale ponderato A dopo aver applicato un filtro che toglie un dB ad ogni ottava (in dB).

frequenza	dB	A
31,3	70	-39,4
63	72	-26,2
125	70	-16,1
250	80	-8,6
500	70	-3,2
1000	65	0
2000	60	1,2
4000	65	1

8000	60	-1,1
16000	67	-6,6

Soluzione

Dalla tabella, “filtrando” i valori A, ottengo i valori dBa a lato.

Ricordando che $L_a = 10\ln\left(\sum_{i=1}^{10} 10^{\frac{dBa_i}{10}}\right)$, si ha:

$$L_a = 10\ln\left(10^{3,6} + 10^{4,58} + 10^{5,39} + 10^{7,64} + 10^{6,68} + 10^{6,5} + 10^{6,12} + 10^{6,6} + 10^{5,89} + 10^{6,04}\right) = 77,71dB$$

Applicando la schermatura indicata si ricavano i seguenti valori:

frequenza	dB	A	dBa	Attenuazione	dBa attenuati
31,3	70	-39,4	30,6	0	30,6
63	72	-26,2	45,8	-1	44,8

dBa
30,6
45,8
53,9
76,4
66,8
65
61,2
66
58,9
60,4

125	70	-16,1	53,9	-2	51,9
250	80	-8,6	76,4	-3	73,9
500	70	-3,2	66,8	-4	62,8
1000	65	0	65,0	-5	60,0
2000	60	1,2	61,2	-6	55,2
4000	65	1	66,0	-7	59,0
8000	60	-1,1	58,9	-8	50,9
16000	67	-6,6	60,4	-9	51,4

e si ha:

$$L_{a\cdot finale} = 74{,}20 dB$$